Teoria de Apreçamento de Ativos e Derivativos Financeiros em Economias Amblíopes: Completamento de Mercados por Contratos Futuros

Jorge Constantin Kapotas*

Junho de 2008

RESUMO

Este trabalho objetiva considerar os problemas da formalização teórica dos modelos de apreçamento de ativos e derivativos em economias em desenvolvimento ou emergentes, onde os mercados para os ativos financeiros básicos encontram-se ainda em fase de gestação. Pretende-se construir um arcabouço teórico para o completamento de mercados e apreçamento de contratos financeiros, derivativos de renda fixa em economias onde se verificam a inexistência de ativos básicos de renda fixa ou mesmo de sua liquidez. São também desenvolvidas abordagens teóricas de apreçamento de contratos DI futuros que respeitam as especificidades e idiossincrasias do desenvolvimento histórico destes contratos nestes mercados de origem amblíope.

Keywords: fixed income derivatives pricing, market completeness, amblyopic economies, arbitrage pricing theory, DI future contracts.

1 Introdução

Este trabalho objetiva considerar os problemas da formalização teórica dos modelos de apreçamento de ativos e derivativos em economias em desenvolvimento ou emergentes, onde os mercados para os ativos financeiros básicos de renda fixa não dispõem de títulos

*OctaPlus Financial Analytics - Rua Quintana, 753, Cj. 92 Cidade Monções, São Paulo - SP - Brasil CEP 04569-011

ou obrigações a partir das quais se possa construir um perfil de horizontes de investimento completo.

Nas modelagens clássicas da literatura financeira do apreçamento de ativos e derivativos de renda fixa de economias maduras ou desenvolvidas, assume-se a existência consensual de mercados líquidos de ativos básicos de renda fixa, ou seja, de um conjunto de títulos de renda fixa sem risco de crédito, em que cada elemento do conjunto se refere a um vencimento de uma data específica, ou dia, de um intervalo temporal, cuja extensão máxima é definida por uma variável $T^* < +\infty$. A premissa de existência de um mercado líquido e transparente deste conjunto de ativos básicos na modelagem e apreçamento de derivativos de renda fixa, além de natural, justifica-se pelo próprio desenvolvimento histórico dos mercados financeiros das economias maduras onde os ativos básicos são constituídos numa fase anterior, atingindo altos volumes de negociação e liquidez, para a subsequente constituição de contratos e produtos derivativos. Neste contexto, a existência destes mercados líquidos de ativos básicos de renda fixa com os mais diversos prazos de vencimento, justifica historicamente a utilização desta premissa no processo teórico de modelagem dos ativos e derivativos de renda fixa.

Em economias historicamente inflacionárias o desenvolvimento e a organização de mercados líquidos de títulos de renda fixa podem ser fatalmente comprometidos. A existência de um ambiente econômico altamente inflacionário, conjugado com longos e substanciais desequilíbrios macroeconômicos e com um ambiente legal e institucional instável potencializa as incertezas, dificultando a tomada das decisões de consumo e investimento dos agentes econômicos para horizontes temporais de médio e longo prazo, bem como o desenvolvimento de instrumentos pelos quais tais decisões são viabilizadas e praticadas[1]. Este processo, desta feita, retarda ou inviabiliza o desenvolvimento de um amplo e líquido mercado de títulos de renda fixa como definimos acima.

Este paradigma em muito se aproxima da realidade histórica dos nossos mercados locais. Os longos períodos inflacionários que assolaram nossa economia por algumas décadas[2] - período no qual nas economias mais desenvolvidas assistimos a um forte movimento de consolidação, expansão, sofisticação e globalização dos mercados de renda fixa[3] - aliados a rupturas institucionais e do "jogo econômico", frutos das várias tentativas e dos diversos planos de estabilização econômica experimentados durante este período[4] contribuíram em larga medida no estabelecimento e consolidação de uma preferência pelo curtíssimo prazo pelos agentes de mercado ao longo deste período. Esta

[1] Na literatura econômica e conhecido o impacto negativo das altas taxas de inflação para o desenvolvimento de mercados financeiros sólidos e estáveis e para o processo de formação de investimentos e poupança, como em Cagan [1956], Klein [1955], Stapleton e Subrahmayan [1982] entre outros.

[2] Uma descrição interessante deste período pode ser encontrada em Senna [1989].

[3] Os processos de globalização e sofisticação dos mercados financeiros são bem desenvolvidos em Smith e Walters [2003] e Giddy [1994].

[4] Vários foram os planos de estabilização econômica lançados neste período e bem conhecidos são os seus efeitos nefastos nos mercados financeiros, ver Senna [1989].

preferência pelo curtíssimo prazo, por sua vez, inviabilizou a formação de um mercado de negociação líquida de títulos básicos de renda fixa de médio e longo prazo, encurtando desta forma o seu horizonte econômico ou a sua capacidade de definir taxas marginais de substituição para horizontes mais longos[5], concentrando primariamente a ação dos agentes econômicos no curtíssimo prazo.

A prevalência desta característica define economias em que predominam ativos ou instrumentos de renda fixa de um dia apenas, onde a liquidez do investimento é reconstituída diariamente através do mecanismo da aplicação financeira diária ou investimento de "overnight". Estas economias, que agora chamamos de amblíopes, dado o curtíssimo horizonte de seus mercados de renda fixa, carecem portanto de uma mercado líquido de renda fixa, formado por uma coleção de títulos de renda fixa sem risco de crédito, em que cada elemento da coleção se refere a um vencimento de uma data específica, ou dia, de um longo perfil temporal. Estas economias ou mercados, em conjunto com os seus ativos e instrumentos de renda fixa, serão formal e matematicamente definidas, de forma a permitir a utilização do ferramental teórico financeiro tradicional de apreçamento por não-arbitragem.

Inicialmente será construída a conceituação e formalização dos ativos ou instrumentos de investimento constituintes de uma economia amblíope. Esta por sua vez será definida e suas limitações teórico-formais serão verificadas. Ao mesmo tempo mecanismos de apreçamento serão desenvolvidos a partir da conceituação e formalização de certos contratos financeiros ou produtos derivativos adicionais que respeitem a evolução histórica das economias amblíopes, e que permitirão o desenvolvimento dos elementos teórico formais para a construção dos teoremas fundamentais de apreçamento das economias amblíopes.

Neste sentido será demonstrada a possibilidade de criação de uma coleção de ativos básicos de renda fixa $\{\Pi_t^T\}$, ou de obrigações de renda fixa, livres de risco de crédito, para um espectro temporal integral, que reflitam as expectativas de acumulação de taxas de juros diários até uma data terminal T. Estes ativos de renda fixa Π_t^T serão rigorosamente construídos através de estratégias de investimento θ_t - envolvendo investimentos no único ativo da economia amblíope e posições em contratos futuros de DI - cujo processo de ganho G_t replique os de uma obrigação básica de renda fixa.

O resultado principal deste trabalho reside na comprovação da existência nos mercados $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$, completados por contratos futuros de DI, de uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ risco-neutra tal que os preços de referência dos contratos futuros $\varphi_{t,T}$ reflitam as expectativas de acumulação das taxas overnight.

[5]Para a importância da formação de taxas marginais de substituição para os diversos horizontes temporais ver Hirshleifer [1970].

2 Economias amblíopes

Na convenção de tempo que iremos utilizar neste artigo a variável $t \in \mathbb{R}^+$ representa uma data de avaliação de um instrumento ou seu derivativo no tempo. A escala natural desta economia é um dia útil de negociação de mercado. Vamos adotar a convenção que os instantes de fechamento dos mercados nestes dias úteis são datas inteiras $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots < T_*$ datas de referência do mercado, sendo que a data mais distante, a data $T^* < +\infty$ é a data de referência mais longa da economia. As datas de observação e avaliação são representadas por $t \in [0, T_*]$. Vamos denotar, portanto, por $\mathfrak{T} = \{0, T_1, T_2, \cdots, T_*\}$ o conjunto de datas terminais t onde uma avaliação financeira é conduzida. Assim, neste trabalho as expectativas condicionais formadas no tempo t refletem expectativas de fim de dia de negociação.

Os mercados amblíopes são definidos como mercados nos quais somente um ativo, ou investimento, de renda fixa livre de risco, com um dia de vencimento é oferecido num dado tempo t, ao final do dia, aos seus agentes econômicos. Estes mercados não possuem outros ativos de renda fixa com vencimentos além do oferecido pelo ativo $\mathbb{O}$, que será chamado de overnight. O ativo $\mathbb{O}$ é o **único** ativo de renda fixa da economia amblíope. Tal característica pode ser encontrada nos mercados cuja particular evolução histórica impossibilitou o desenvolvimento de mercados de renda fixa com títulos líquidos de renda fixa livres de risco que formatassem inequivocamente uma estrutura a termo de taxa de juros. Mercados embrionários em fase de gestação de seus instrumentos, de formação e amadurecimentos de seus agentes e da sua organização podem apresentar este viés temporal pelo curtíssimo prazo.

Além disto, nas economias vitimadas por longos períodos inflacionários, nos quais altas e voláteis taxas de inflação agem no sentido de desestabilizar a sua estrutura de preços relativos e dificultar a formação de expectativas de médio e longo prazo por parte dos seus agentes, pode-se localizar o caráter amblíope de seus mercados de renda fixa. Nestes mercados, predominam ativos de curtíssimo prazo, de alta liquidez, concebidos inicialmente com o propósito de proteger os agentes econômicos dos efeitos corrosivos das altas e incertas taxas de inflação. Em certos casos, podem se desenvolver alguns instrumentos de prazo mais longo, indexados a taxas de inflação, de liquidez restrita e com significativo prêmio de risco e liquidez atrelado. Não faltam exemplos em nossa história econômico-financeira recente que possam servir de ilustração para as condições acima descritas.

Definição 1: *Um mercado amblíope de renda fixa $\mathfrak{M}$ é um mercado diário definido pela existência de um único ativo de renda fixa denominado de Overnight $\mathbb{O} = \{O_i\}_{i=1}^{T^*}$ que representa uma sequência de investimentos feitos ao fim dos dias $t \in \mathfrak{T} = \{0, T_1, T_2, \cdots, T_*\}$ remunerado a uma taxa de juros geométrica O_t com convenção de contagem de tempo de dias úteis por ano 252, expressa em percentual ao ano, que produzirá um valor de resgate igual a N no próximo período. Isto é, em t o preço do investimento é igual a:*

$$P(t, t+1) = \frac{N}{(1 + O_t)^{\frac{1}{252}}} \qquad (1)$$

As variáveis O_i são variáveis aleatórias definidas em um espaço filtrado de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_{t \in \mathfrak{T}}\}, \mathbb{P})$ que modela matematicamente a incerteza na taxa do depósito diário.

Vamos assumir que o processo overnight é limitado, isto é, existe uma constante c_0 tal que $0 \leq O_t(\omega) \leq c_0$. Isto, por sua vez, condiz com a realidade econômica.

O investimento overnight $\mathbb{O}$, cujo preço é denotado por $P(t, t+1)$ é o que na literatura chamamos de uma obrigação em título de renda fixa com vencimento de um dia. O preço $P(t, t+1)$ reflete a incerteza da economia para um horizonte de um dia.

Tradicionalmente, modela-se naturalmente economias de renda fixa que conseguem traduzir a incerteza para períodos arbitrários T de tempo. A importância da existência de mercados financeiros capazes de formar taxas marginais de transformação para horizontes T, para qualquer $T > 1$, dados os conjuntos de oportunidades, ou investimentos, disponíveis nos vários horizontes T não pode ser minimizada. O desenvolvimento e consolidação de mercados com estruturas temporais líquidas, permite que a transferência de fundos entre os tomadores e doadores de recursos financeiros ocorra de forma eficiente para os diversos horizontes T da estrutura temporal de investimentos destas economias[6].

Assume-se tradicionalmente que a economia é formada por um contínuo de investimentos $\mathbb{B} = \{B(\cdot, T)\}_{T>0}$ que permitem a aplicação de recursos por um horizonte $T > 0$ qualquer. Neste caso, investindo-se no tempo $t < T$ um montante igual a $B(t, T)$ resgata-se um valor N no tempo T. Expressando este investimento através de uma taxa composta geométrica com convenção de contagem de tempo de dias úteis por ano, 252, pode-se escrever esta relação como:

$$B(t, T) = \frac{N}{(1 + y(t, T))^{\frac{T-t}{252}}} \qquad (2)$$

A coleção das taxas $\{y(t, T)\}_{t<T}$ é chamada de Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) que é objeto clássico de modelagem matemática-financeira desde as publicações de Vasicek [1977], Dothan [1978], Cox, Ingersoll e Ross [1985], Ho e Lee [1986], Jamshidian [1989], Black, Derman e Toy [1990], Black e Karasinsky [1991], Hull e White [1990],[1993],[1994a] e [1994b], que modelaram taxas infinitesimais através de dinâmicas difusivas sem restrições e das abordagens mais recentes as quais impoem às dinâmicas difusivas das taxas a termo restrições de não-arbitragem de Heath, Jarrow e Morton [1992], Miltersen, Sandman e Sondermann [1997], Jamshidian [1997] e Brace, Gatarek e Musiela[1997] que modelam as taxas a termo de taxas reais de mercado também sob o

[6] Este processo encontra-se bem ilustrado em Copeland e Weston [1983].

paradigma de não-arbitragem.

Nas economias amblíopes não existem, no entanto, preços de mercado $B(t,T)$ de títulos de renda fixa com vencimento para qualquer $T > t+1$, pois a economia amblíope esta limitada a um único ativo de renda fixa, $\mathbb{O}$ denominado de overnight, não permitindo que investimentos que embutam expectativas construídas a partir de horizontes de vencimento superiores sejam oferecidos aos agentes econômicos.

Este fato peculiar não é tradicionalmente considerado na literatura de renda fixa e constitui o objeto principal de estudo deste trabalho, tanto nos aspectos financeiros quanto em sua formalização matemática rigorosa.

O prolongamento desta deficiência teria consequências nefastas para estas economias, prejudicando o planejamento e o processo de tomada de decisões de produção e investimento dos seus agentes. Nestes casos a separação dos processos de decisão ótima de investimento e produção das decisões de consumo do Teorema de Separação de Fisher não pode ser plenamente aplicado, pois a inexistência de mercados de renda fixa com estruturas temporais definidas impede que os agentes escolham projetos de produção e investimento ótimos para um dado horizonte T, até o ponto em que a taxa marginal de retorno dos projetos iguale a taxa de retorno dada pela estrutura temporal dos mercados de renda fixa[7].

Como vimos acima, condicionantes histórico-econômicos podem prejudicar o desenvolvimento pleno de mercados líquidos de títulos de renda fixa. O mercado brasileiro com seu longo histórico repleto de períodos inflacionários, pacotes econômicos e monetários, desenvolveu, no entanto, um contrato financeiro - que sem a necessidade de investimento inicial algum e sem, portanto, proporcionar um fluxo de caixa de resgate - simulasse em seu valor de referência o preço de um título básico de renda fixa livre de risco.

Este tipo de contrato é um contrato futuro que reflete expectativas de acumulação de ganhos de overnight para o seu período contratual. Assim, com a introdução de contratos derivativos deste tipo conseguiu-se integrar os efeitos e consequências da ambliopia de forma única e original. Matematicamente esta questão não foi tratada na literatura como no caso de Harrison e Pliska [1981], Cochrane [2001] entre outros, pois completamentos por meio de derivativos são usualmente feitos com derivativos que envolvem um custo de entrada ou um fluxo de caixa de resgate, o que não é o caso em questão.

Matematicamente precisamos de um arcabouço teórico que permite o complemento de uma economia amblíope $\mathfrak{M}$ por meio de uma coleção $\mathbf{\Phi}$ de contratos futuros, $\varphi \in \mathbf{\Phi}$, e que resolva a incerteza para períodos arbitrários de tempo.[8]

[7]Esta questão recebe um tratamento clássico em Hirshleifer [1970] e Copeland e Weston [1983].

[8]Contratos futuros deste tipo tiveram sua negociação iniciada na segunda metade da década de oitenta pela Bolsa de Mercadorias e Futuros (BMF) em São Paulo e apresentaram uma crescente e significativa aceitação junto às instituições financeiras locais. Tendo evoluído a partir de formatações iniciais,

Definição 2: *Em uma economia amblíope* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{O})$ *sobre o espaço* $(\Omega, \mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_{t\in\mathfrak{T}}\}, \mathbb{P})$*, define-se um contrato futuro* $\varphi(t_0, T)$ *de taxas de juros celebrado em* $t_0 > 0$ *com vencimento em* $T > t_0$ *como sendo um par* $\varphi(t_0, T) = (\{V(s,T)\}_{s\in[0,T^*]}, \{A_{s,T}\}_{s\in[0,T^*]})$ *composto por:*

(i) *preços de referência* $V(s,T)$ *formados pelo mercado de forma que o processo* $V(\cdot\,, T) : \mathfrak{T} \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ *seja* $\mathfrak{F}_t$*-mensurável. Estes preços embutem expectativas de acúmulo de rendimentos e quantificam investimentos necessários para a obtenção de um valor de resgate* N *no vencimento do contrato.*

(ii) *Ajustes de margens* $\mathbb{A} = \{A_{s,T}\}_{s\in\mathfrak{T}, s\leq T}$ *dado por:*

$$A_{s,T} = V(s,T) - V(s-1,T)(1 + O_{s-1})^{\frac{1}{252}} \qquad (3)$$

que constituem o fluxo de caixa do contrato e que refletem ao fim do dia as flutuações do mercado das taxas de depósito $\mathbb{O}$.

As taxas implícitas contratuais dos preços de referência dos contratos futuros são obtidas pela seguinte relação:

$$V(t,T) = \frac{N}{(1 + y(t,T))^{\frac{T-t}{252}}} \qquad (4)$$

Utilizando o conceito de mercados amblíopes desenvolvido nos itens anteriores e os contratos futuros acima definidos, inicia-se a construção do seu processo de correção.

Definição 3: *Seja* $\mathfrak{M}(\mathbb{O})$ *um mercado amblíope de renda fixa. Uma pré-correção de ambliopia por meio de contratos futuros* $\varphi(t,T)$ *com valor de resgate* N *é um mercado* $\mathfrak{M}^{\Phi}$ *formado pelo investimento overnight* $\mathbb{O}$ *e por uma coleção* $\boldsymbol{\Phi} = \{\varphi(t,T)\}$ *de contratos futuros* $\varphi(t,T)$ *nos quais as seguintes condições se verificam:*

(i) *Para qualquer* $t > 0$ *, existe uma família* $\boldsymbol{\Phi} = \{\varphi(t,T)\}_{T>t}$ *de contratos futuros* $\varphi(t,T)$ *celebrados em* $t \in \mathfrak{T}$ *e vencendo em* T *para todo* $T < T_*$*,*

(ii) *O preço de referência* $V(t,T)$ *para o futuro é tal que* $0 < V(t,T) < N$.

A primeira condição garante a existência de vencimentos T, para todos os $t < T < T_*$, em cada data de negociação t, cobrindo o espectro temporal até o tempo terminal T_*, enquanto a segunda condição assegura a existência de taxas implícitas positivas em todos

---

os contratos futuros de depósitos de um dia, ou contratos DI, como são conhecidos no mercado local, são diariamente e liquidamente negociados pelos agentes econômicos na BMF. A cada valor de referência do contrato corresponde uma taxa de juros implícita negociada, sendo que o cálculo do valor de referência correspondente à taxa negociada é feito pela relação fornecida pela equação (2), acima, onde N é usualmente igualado a 100.000,00 unidades da moeda de negociação.

os preços de referência de contratos negociados.

Como verificado anteriormente, para cada contrato $\varphi(t,T)$, existe uma taxa de juros negociada, ou de referência do contrato, $y(t,T)$, implícita no seu valor de referência correspondente ao seu prazo de vencimento. Com a garantia de existência de uma sequência de vencimentos negociados $\{\varphi(t,T)\}_{T>t}$, dada pela primeira condição acima, podemos obter uma sequência de taxas de juros implícitas, $\{y(t,T)\}_{T>t}$, para todos os vencimentos T, tal que $t < T < T_*$.

Esta sequência de taxas de juros implícitas, $\{y(t,T)\}_{T>t}$ permite que uma curva de rendimentos sintética (implícitas nos preços de referência dos contratos) a termo, ou *forward*, composta por taxas de juros implícitas a termo $\{f(t,T_i,T_j)\}_{T>t,j>i}$. O processo de determinação da taxa a termo, $f(t,T_i,T_j)_{T>t,j>i}$, é apresentado na definição que segue abaixo.

Definição 4: *Para uma coleção de futuros $\{\varphi(t,T)\}_{T>t}$ define-se as taxas de juros a termo, $f(t,T_i,T_j)_{T>t,j>i}$, como:*

$$f(t,T_i,T_j)_{T>t,j>i} = \left[\frac{(1+y_{t,T_j})^{\frac{T_j-t}{252}}}{(1+y_{t,T_i})^{\frac{T_i-t}{252}}} - 1\right]^{\frac{252}{T_j-T_i}} \qquad (5)$$

Observa-se que para o cálculo das taxas de juro a termo $f(t,T_i,T_j)_{T>t,j>i}$ as mesmas convenções de tipo de taxa, geométrica, e de contagem de dias, úteis, são adotadas.

Com esta definição, decorre que, o preço de referência, $V(t,T)$, pode ser expresso por meio da relação:

$$V_{t,T} = \frac{N}{\prod_{s=t+1}^{T-1} (1+f(t,s))^{\frac{1}{252}}} \qquad (6)$$

3 Estratégias de Investimento e Correção de Ambliopia

Com as definições, ora em mãos, dos ativos de overnight $\mathbb{O}$ e dos contratos futuros de DI, Φ, os quais, como mencionado anteriormente, são liquidamente negociados em mercados organizados de bolsa[9], e das hipóteses relativas às condições de pré-correção da definição 3, pode-se agora proceder ao desenvolvimento dos mecanismos de correção amblíope do mercado $\mathfrak{M}(\mathbb{O})^{\Phi}$.

Serão formalizadas as seguintes definições necessárias para a construção das estratégias de investimento de correção de ambliopia:

[9]Termos e condições contratuais de negociação dos contratos futuros de DI podem ser encontrados no endereço eletrônico: `www.bmf.com.br`

Definição 6: *Uma estratégia de investimento em uma economia amblíope* $\mathfrak{M}(\mathbb{O})^\Phi$ *pré-corrigida por futuros é um processo estocástico* $\theta \in L^2(\mathfrak{T} \times \Omega, \mathbb{R}^{T_*})$ *que:*

$$\theta : \mathfrak{T} \times \Omega \to \mathbb{R}^{T_*} \text{ represente:}$$

(i) θ_t^1 *é o dinheiro investido em* t *no ativo overnight* $\mathbb{O}$

(ii) θ_t^T *é a posição de contratos futuros com vencimento na data* T.

Denotamos o conjunto das estratégias de investimento em $\mathfrak{M}^\Phi$ como sendo $\Theta(\mathfrak{M}^\Phi)$.

Exemplo 1:

Conta remunerada $\mathfrak{B}$: É uma conta obtida pela re-aplicação do investimento inicial $\theta_t^1 = 1$ de R$ 1 somente no ativo overnight, isto é: $\theta_t^1 = \theta_{t-1}^1(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}}$. O valor remanescente na data $t > 0$ da conta $\mathfrak{B}$ é denotado por:

$$\mathfrak{B}_t = \prod_{i=1}^{t}(i + O_i)^{\frac{1}{252}}$$

Exemplo 2:

Estratégia de re-investimento com consumo. Neste caso, o dinheiro resgatado é re-aplicado parcialmente. Definimos o processo de ganho de recursos como sendo $G^1(\theta) : [0, T_*] \times \Omega \to \mathbb{R}$ dado por: $G_t^1(\theta) = \theta_{t-1}^1(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \theta_t^1$. $G_t^1(\theta)$ representa as sobras de caixa na data $t > 0$ que não são re-investidas para o período seguinte.

Uma estratégia de investimento será considerada como um processo estocástico T_*-dimensional, $\{\theta_t, t \geq 0\}$, cujos componentes $\theta_t^1, \theta_t^2, ..., \theta_t^{T^*}$ são limitados e representam posições de investimento em t nos ativos da economia $\mathfrak{M}^\Phi$ composta pelos T_* instrumentos financeiros disponíveis. Esta estratégia de investimento será construída através da utilização de posições tomadas no ativo básico inicial, O_t, e em contratos futuros $\Phi(t, T)$ de $\mathfrak{M}^\Phi$ que permitirão a construção sintética, num tempo inicial t, de um instrumento de renda fixa que reproduz os fluxos de caixa de um título de renda fixa livre de risco qualquer vencimento T, para todos os $t < T < T_*$. Isto será possível investindo-se uma quantidade inicial de dinheiro em O_t e tomando-se uma posição equivalente comprada em contratos $\Phi(t, T)$. O re-investimento dos ajustes positivos decorrentes da posição nos contratos futuros no ativo overnight e financiamento dos ajustes negativos pelo montante inicialmente investido em O_t, reproduzem para o tempo de vencimento T os fluxos de caixa de um título de renda fixa livre de risco, de acordo com a dinâmica de final de dia representada pela Tabela 1[10]. Nesta tabela desenvolve-se um exemplo para um período de três dias no qual a estratégia de investimento acima é reproduzida.

[10] Na Tabela 1 abaixo $V(t_i, t_j)$ é denotado por V_{t_i,t_j}, sem perda de generalidade.

Para que essas ideias possam ser rigorosamente formalizadas precisamos de algumas definições matemáticas:

Tabela 1
Fluxo de caixa resultante de investimentos em overnight e posições tomadas em contratos futuros

Posição \ Tempo	t_0	t_1	t_2	$T = t_3$
$O + \Phi$	V_{t_0,t_3}	$V_{t_0,t_3}(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}} +$ $V_{t_1,t_3} - V_{t_0,t_3}$ $(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}}$	$V_{t_1,t_3}(1+O_{t_1})^{\frac{1}{252}} +$ $V_{t_2,t_3} - V_{t_1,t_3}$ $(1+O_{t_1})^{\frac{1}{252}}$	$V_{t_2,t_3}(1+O_{t_2})^{\frac{1}{252}} +$ $V_{t_3,t_3} - V_{t_2,t_3}$ $(1+O_{t_2})^{\frac{1}{252}}$
Investimento/ Reinvestimento	$-V_{t_0,t_3}$	$+V_{t_1,t_3} - V_{t_1,t_3}$	$+V_{t_2,t_3} - V_{t_2,t_3}$	$+V_{t_3,t_3}$
Fluxo de Caixa	$-V_{t_0,t_3}$	0	0	1

Definição 7: *Definimos o processo de ganho de uma estratégia* $\theta \in \Theta(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))$ *como sendo o processo estocástico*

$$G(\theta) : [0, T_*] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

dado por: $G_t(\theta) = G_t^1(\theta) + \sum_{T \in \mathfrak{T}, T>1} G_t^T(\theta)$, *onde* $G_t^T(\theta)$ *denota:*

(i) *Para* $T = 1$ *o ganho no ativo overnight:*

$$G_t^1(\theta) = \theta_{t-1}^1 (1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \theta_t^1 \qquad (7)$$

(ii) *Para* $T > 1$ *o ganho de margem do contrato futuro* Φ_T *com vencimento em* T*:*

$$G_t^T(\theta) = \theta_{t-1}^T [V(t,T) - V(t-1,T)(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}}] \qquad (8)$$

Nota-se que $G_t^T(\theta)$ não contém o termo θ_t^T, pois os futuros$\{\Phi_T\}_{T \in \mathfrak{T}}$ exigem um desembolso nulo para entrada.

A resolução total da ambliopia será feita mediante investimentos e posições que envolvam desembolsos iniciais e resgates terminais. Isto requer que matematicamente possamos negociar livremente a carteira $\Pi(\theta)$ baseada em estratégias de investimento $\theta \in \Theta(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))$ cujos ajustes de margem decorrem do próprio overnight conforme visto anteriormente na Tabela 1. Define-se assim:

Definição 8: *Uma estratégia de investimento $\theta \in \Theta(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))$ é dita autofinanciável se para qualquer $t \in \mathfrak{T}$:*

$$\theta_t^1 = \theta_0^1 + \sum_{s=0}^{t} G_s(\theta) \qquad (9)$$

Isto significa que os fluxos de caixa gerados pelos ajustes contratuais A_t são financiados ou absorvidos pelos investimentos em overnight $\mathbb{O}$.

A coleção de estratégias autofinanciáveis será denotada por $\Theta^*(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))$. Será considerada como hipótese a existência de um mercado líquido de negociação dos certificados, $\Pi_{t,T}(\theta)$, que fornecem os fluxos de caixa das estratégias de investimento $\theta \in \Theta^*(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))$.

Em outras palavras exige-se que instrumentos líquidos e negociáveis, representados pelos certificados $\Pi(\theta)$ que garantem o repasse incondicional dos fluxos de caixa gerados pelas estratégias autofinanciáveis $\theta \in \Theta^*(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))$, existam para qualquer tempo de avaliação t e horizonte de investimento T, ambos pertencentes ao conjunto de datas $\mathfrak{T}$. Estes instrumentos negociados liquidamente tem seus preços formados pelos agentes da economia $\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O})$, que atuam neste mercado sob os pressupostos usuais de negociação.[11]

Hipótese 1: *Uma correção amblíope para uma pré-correção $\mathfrak{M}^{\Phi}$ é a existência de um mercado organizado $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ caracterizado pela negociação da coleção de dos ativos de renda fixa $\{\Pi(\theta)\}_{\theta \in \Theta^*(\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi})}$ resultante das estratégias de investimento em Θ^*.*

Observa-se igualmente que a coleção de ativos de renda fixa $\{\Pi_{t,T}\}_{t,T \in \mathfrak{T}, t<T}$, é constituída por certificados $\Pi_{t,T}$ que exigem um desembolso inicial, ou investimento, para o período $[t,T] \in \mathfrak{T}$. Este desembolso inicial representa o custo de entrada ou preço de aquisição, sempre positivos, dos ativos $\Pi_{t,T}$, formados pelo mercado $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ na ausência de arbitragem. Isto implica economicamente na inexistência de uma carteira de arbitragem cujo custo de entrada seja negativo e seu ganho seja sempre positivo.[12]

[11] As premissas usuais de negociação implicam na existência de mercados eficientes, fracionários, sem custos ou impostos, no qual investidores podem comprar e vender ativos livremente, sempre preferindo um nível de riqueza maior a outro menor.

[12] Uma oportunidade de arbitragem poderia ser representada por uma estratégia $\boldsymbol{\zeta}_t = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{T_*})$ de investimento no vetor de preços $\boldsymbol{\Pi}_t$ dos certificados $\Pi_{t,T}(\theta)$, tal que o custo de entrada da estratégia seja negativo e o seu ganho sempre positivo para qualquer tempo de resgate $T > t$, ou seja, $\boldsymbol{\zeta}_t \boldsymbol{\Pi}_t \leq 0$ e $G_t(\boldsymbol{\zeta}_t) > 0$, dado que os ganhos das estratégias autofinanciadas $G_t^T(\theta)_{\theta \in \Theta^*(\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O}))}$ são positivos.

A Ausência de oportunidades de arbitragem implicaria ainda na existência de um funcional linear de apreçamento da volatilidade da sua propriedade martingal e de sua extensão no caso de mercados completos à unicidade da medida martingal de apreçamento.[13]

Neste sentido, o processo de preços assim constituído nos permite utilizar o arcabouço teórico de apreçamento por não-arbitragem e os conceitos de completude de mercado em termo discreto, formalizados por Harrison e Kreps [1979] e potencialmente por Ross e Dybvig [1987], para o apreçamento dos ativos da economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$.[14]

Tal fato permite que seja provado um resultado central que estabelece o vínculo entre a correção de ambliopia e o conceito de obrigação de renda fixa para horizontes $T > 1$. Será ainda provado que a hipótese de não-arbitragem garante a existência de uma estrutura temporal de taxas de juros formada a partir de ativos de renda fixa com caixa. Chamaremos tais ativos de ativos primitivos de renda fixa.

Teorema 1: *Se $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ não admite oportunidades de arbitragem, então para qualquer $T \in \mathfrak{T}$, existe um ativo $\Pi_T \in \{\Pi(\theta)\}_{\theta \in \Theta^*(\mathfrak{M}^{\Phi})}$ com as seguintes propriedades:*

(i) Π_T *é um ativo cujo valor de mercado de não-arbitragem, denominado $P(t,T)$, é positivo, $P(t,T) > 0$, e igual ao preço de referência de um contrato futuro vencendo em $T > t$, ou seja, $P(t,T) = V(t,T)$.*

(ii) *O valor em $t = T$ do ativo Π_T é igual a N, onde N é o valor nominal de Φ_T.*

Assim os ativos primitivos $\{\Pi_T\}_{T \in \mathfrak{T}}$ são as obrigações de renda fixa que permitem a aplicação de moeda por uma taxa fixa, implícita no preço de referência do futuro. Tais ativos primitivos $\{\Pi_T\}_{T \in \mathfrak{T}}$, "obrigações sintéticas de renda fixa", são ativos gerados por meio de uma estratégia que reinveste no ativo overnight as sobras (ou déficits) de caixa gerados pelos ajustes dos contratos futuros.

Teorema 2: *Sob a hipótese de não-arbitragem para $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$, os ativos primitivos $\{\Pi_T\}_{T \in \mathfrak{T}}$ constituem uma base para $\{\Pi(\theta)\}_{\theta \in \Theta^*}$, isto é, $\Pi(\theta)$ pode ser replicado por uma combinação linear dos ativos primitivos de renda fixa.*

[13] Todos os requisitos formais para a construção rigorosa dos Teoremas Fundamentais das Finanças em tempo discreto fazem parte da literatura clássica consagrada: Harrison e Kreps [1979], Ross e Dybvig [1987], Duffie [2001], Musiela e Rutkowski [2002], Björk [2004] entre outros.

[14] As primeiras contribuições à Teoria de Apreçamento de Ativos utilizando-se dos conceitos relativos a "lei do preço único"e completude dos mercados remontam aos trabalhos seminais de Debreu [1959], Arrow [1964] e Hirshleifer [1966]. Esta temática foi posteriormente retomada por Ross [1973] através da derivação do operador de apreçamento linear em espaço finito e das contribuições adicionais de Ross [1978] e de Harrison e Kreps [1979] que estendem os teoremas fundamentais de apreçamento a espaços arbitrários e equalizam o apreçamento risco neutro à esperança martingal, seguidas pelas contribuições generalizantes adicionais de Dybvig e Ross [1987].

A prova deste resultado será completada adiante por meio de um lema técnico.

Prova do Teorema 1:

Vamos fixar $T_0 > 1$ e construir um ativo Π_{T_0} que irá requerer um investimento inicial $x = V(t,T)$ no ativo overnight $\mathbb{O}$ e um rebalanceamento η_{t,T_0}, $\eta_{t,T_0} = (\eta^T_{t,T_0})_{T\in\mathfrak{T}}$ em futuros $\{\varphi_T\}_{T\in\mathfrak{T}}$ e overnight $\mathbb{O}$.

Se $T \neq T_0$, tomamos $\eta^T_{t,T_0} = 0$. Caso $T = T_0$, tomamos $\eta^T_{t,T_0} = N$.

Sem perda de generalidade assumimos que $N = 1$.

Isto significa que a posição Π_{T_0} será gerada pela aplicação em $t = 0$ de x no ativo overnight $\mathbb{O}$ e pela posição comprada em um único contrato futuro vencendo em $T_0 > 1$. Veremos em seguida como escolher η^1_{t,T_0} para $t > 0$ de forma a replicar uma obrigação sintética de renda fixa. Para isto, calculamos o processo de ganho $G_t(\eta)$ da estratégia η para todo $t \in \mathfrak{T}$:

$$G_t(\eta) = G^1_t(\eta) + G^{T_0}_t(\eta)$$

Utilizando as relações expressas pelas equações (7) e (8), temos:
$$G_t(\eta) = \eta^1_{t-1,T_0}(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \eta^1_{t,T_0} + 1(V(t,T_0) - V(t-1,T_0)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}})$$

Observa-se que apenas no caso em que se escolhe $\eta^1_{t,T_0} = V(t,T_0)$ e $\eta^1_{t-1,T_0} = V(t-1,T_0)$ zeram-se os ganhos matemáticos:

$$\begin{aligned} G_t(\eta) &= V(t-1,T_0)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - V(t,T_0) + V(t,T_0) \\ &\quad -V(t-1,T_0)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} = 0, \qquad \text{para } t \leq T. \end{aligned}$$

Quando $t = T_0$ tem-se que $G_{T_0}(\eta) = 1$ o que prova o teorema.

Observa-se que o custo inicial do investimento é igual a $\eta^1_{0,T_0} = P(0,T_0)$ e o valor $V(0,T_0)$ do ativo Π_{T_0} em $t = 0$ é idêntico a $\eta^1_{0,T_0} = P(0,T_0)$, pois em caso contrário, sendo o mercado formado pela coleção de ativos primitivos $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*}$ não-arbitrável implicaria que $V(0,T_0) - P(0,T_0) \neq 0$ seria um saldo de caixa (em posição comprada ou vendida) que criaria um ganho sem risco.

A prova do Teorema 2 decorre da observação que:

Lema 1: *O processo de ganho $G_t(\theta)$ é linear para qualquer data de avaliação $t < T$, $T \in \mathfrak{T}$, isto é:*

$$G_t(\alpha\theta + \beta\eta) = \alpha G_t(\theta) + \beta G_t(\eta) \qquad (10)$$

Prova:

A prova é uma simples manipulação algébrica de definição na qual são utilizadas as equações (8) e (9)

$$
\begin{aligned}
G_t(\alpha\theta+\beta\eta) &= G_t^1(\alpha\theta+\beta\eta) + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} G_t^T(\alpha\theta+\beta\eta) \\
&= (\alpha\theta_{t-1}^1+\beta\eta_{t-1}^1)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - [\alpha\theta_t^1+\beta\eta_t^1] \\
&\quad + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} (\alpha\theta_{t-1}^T+\beta\eta_{t-1}^T)(V(t,T)-V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}})
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo-se a expressão tem-se que:

$$
\begin{aligned}
G_t(\alpha\theta+\beta\eta) &= \alpha\theta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} + \beta\eta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \alpha\theta_t^1 - \beta\eta_t^1 \\
&\quad + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \alpha\theta_{t-1}^T\left[V(t,T)-V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right] \\
&\qquad + \beta\eta_{t-1}^T\left[V(t,T)-V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right] \\
&= \alpha\theta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \alpha\theta_t^1 + \beta\eta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \beta\eta_t^1 \\
&\quad + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \alpha\theta_{t-1}^T\left[V(t,T)-V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right] \\
&\quad + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \beta\eta_{t-1}^T\left[V(t,T)-V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right]
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
G_t(\alpha\theta+\beta\eta) &= \alpha\left[\theta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \theta_t^1\right] + \beta\left[\eta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \eta_t^1\right] \\
&\quad + \alpha \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \theta_{t-1}^T\left[V(t,T)-V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right] \\
&\quad + \beta \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \eta_{t-1}^T\left[V(t,T)-V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
= \alpha \underbrace{\left\{\left[\theta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \theta_t^1\right] + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \theta_{t-1}^T\left[V(t,T)-V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right]\right\}}_{G_t(\theta)}
$$

$$+\beta\underbrace{\left\{\left[\eta_{t-1}^{1}(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}-\eta_{t}^{1}\right]+\sum_{T\in\mathfrak{T},T>1}\eta_{t-1}^{T}\left[V(t,T)-V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right]\right\}}_{G_t(\eta)}$$

$$=\alpha G_t(\theta)+\beta G_t(\eta)$$

Prova-se agora o resultado central do artigo. Este resultado, a existência de uma medida de Arrow-Debreu formaliza em termos matemáticos o fato que os agentes de mercado que negociam os ativos $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*}$ o fazem por meio de preços que refletem o desconto de uma acumulação da taxa de overnight para o período. Mais precisamente prova-se o seguinte teorema:

Teorema 3: *Se o mercado de ativos (sintéticos) $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))}$ não admitir oportunidades de arbitragem, então existe uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ equivalente à medida $\mathbb{P}$ no espaço filtrado $(\Omega,\mathfrak{F}=\{\mathfrak{F}_t\}_{t\in\mathfrak{T}},\mathbb{P})$ de tal forma que os preços de referência $\{V(t,T)\}_{t\leq T}$ dos contratos futuros $\phi_{t,T}\in\Phi$ refletem as expectativas de acumulação das taxas overnight $\{O_i\}_{i=1}^{T_*}$, isto é, para qualquer $t<T<T_*$, $t\in\mathfrak{T}$ temos:*

$$V(t,T)=\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{i=t}^{T-1}\frac{1}{(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right] \qquad (11)$$

Para provar o teorema fundamental, precisamos de uma construção geométrica que traduza a hipótese de não arbitragem por meio de funcionais lineares em L^2. É exatamente a representação de Riesz deste funcional que entregará a medida $\mathbb{Q}$ de Arrow-Debreu.

Corolário 1: *O conjunto de oportunidades de ganhos terminais, isto é, o espaço:*

$$M_{T_*}=\{G_{T_*}(\theta),\theta\in\Theta^*(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))\} \qquad (12)$$

é um subespaço linear de $L^2(\Omega)$.

O corolário segue diretamente do Lema 1.

Definimos o funcional de precificação como sendo o funcional $\Psi: M_{T_*}\to\mathbb{R}$ dado pelo custo de entrada na estratégia $\theta\in\Theta^*$, que gera o ganho, $G(\theta)$, isto é:

$$\Psi(G_{T_*}(\theta))=\theta_0^1. \qquad (13)$$

Proposição 1: *Admitindo que os ativos* $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))}$ *formam um mercado sem oportunidades de arbitragem, então a relação* $G_{T_*}(\theta) \overset{\Psi}{\longmapsto} \theta_0^1$ *é unívoca, definindo um funcional linear* $\Psi : M_{T_*} \subseteq L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Prova: A linearidade já foi verificada. Precisamos mostrar que o funcional está bem definido. Suponha que existam $\theta,\ \eta \in \Theta^*$ com $G_{T_*}(\theta) = G_{T_*}(\eta)$. Precisamos mostrar que:

$$\theta_0^1 = \eta_0^1$$

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $\theta_0^1 > \eta_0^1$. O caso contínuo é simétrico. Neste caso, seja $\lambda = \eta - \theta \ \in \Theta^*$ uma estratégia de investimento. Temos que:

$$G_{T_*}(\lambda) = G_{T_*}(\eta) - G_{T_*}(\theta) = 0$$

Além disto, o custo inicial $G_0(\lambda)$ é igual a:

$$G_0(\lambda) = G_0^1(\eta) - G_0^1(\theta) = \eta_0^1 - \theta_0^1 < 0$$

Assim, λ é uma arbitragem em $T_* > 0$, o que contradiz o fato que a economia é não-arbitrável. Logo $\theta = \eta$ e o funcional Ψ está bem definido.

Um argumento semelhante permite mostrar que Ψ é monotônico em M_{T_*}.

Prova do Teorema 3: (Existência)

Como $M \subseteq L^2$ é fechado[15], o funcional Ψ pode ser estendido a um funcional linear contínuo $\Psi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ que poderá ser representado por meio de um elemento $\pi \in L^2(\Omega)$, isto é,

$$\Psi(x) = \mathbb{E}[\pi x], \text{ para qualquer } x \in L^2(\Omega)$$

Vamos aplicar esta relação a vários elementos $x = G_{T_*}(\theta)$, com $\theta \in L^2$ representando uma série de investimentos em overnight e futuros. Na verdade, vamos mostrar que existe uma medida $\mathbb{Q}$ que transforma os ativos sintéticos Π_T deflacionados pela conta remunerada $\mathfrak{B}_t = \prod_{i=0}^{t-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}$ em $\mathbb{Q}$-Martingais.

De fato, se esta afirmação for comprovada, então segue a relação (11) reapresentada abaixo:

$$V(t,T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{i=t}^{T-1} \frac{1}{(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right]$$

[15] Isto segue do fato que o processo $\{O_i\}$ é limitado e do fato que o processo G_t é bilinear em θ e $\mathbb{O}$. Este desenvolvimento pode ser verificado em Duffie [2001].

Assim para qualquer $T > t, t \in \mathfrak{T}$, a relação: $\dfrac{V(t,T)}{\mathfrak{B}_t} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\dfrac{V(T,T)}{\mathfrak{B}_T}\right]$, implica que:

$$V(t,T) \; = \mathfrak{B}_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V(T,T)}{\mathfrak{B}_T}\right]$$

Utilizando o fato que $V(T,T) = 1$, temos que:

$$V(t,T) \; = \mathfrak{B}_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\mathfrak{B}_T}\right]$$

e ainda que,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\mathfrak{B}_T}\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathfrak{B}_t}{\mathfrak{B}_T}\right] &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\prod_{i=0}^{t-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}{\prod_{i=0}^{T-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\prod_{i=0}^{t-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}{\prod_{i=0}^{t-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}} \prod_{i=t}^{T-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{i=t}^{T-1}\frac{1}{(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right] \qquad (14)
\end{aligned}$$

Para comprovar a propriedade Martingal vamos inicialmente tomar $\theta \in \Theta^*$ com θ_0^1 e investir apenas no ativo overnight com $\theta_t^1 = \theta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}$ com investimento inicial igual a 1. Neste Caso:

$$\begin{aligned}
\Psi(G_{T_*}(\theta)) \; &= \theta_0^1 = 1 = \mathbb{E}[G_{T_*}(\theta)\pi] \\
&= \mathbb{E}[\prod_{i=0}^{T_*-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}\pi] \qquad (15)
\end{aligned}$$

Seja $\xi \in L^2(\Omega)$ o elemento $\xi = \pi \prod_{i=0}^{T_*-1} (1 + O_i)^{\frac{1}{252}} = \pi \mathfrak{B}_{T_*}$.

Seja $(\xi_t)_{t\in[0,T_*]}$, o processo de filtração de Doob de ξ, isto é:

$$\xi_t = \mathbb{E}_t[\xi] \qquad (16)$$

Como $1 = \mathbb{E}[\prod_{i=0}^{T_*-1} (1+O_i)^{\frac{1}{252}} \pi] = \mathbb{E}[\xi]$, então $\xi > 0$ define uma medida $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$ através da derivada

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \xi > 0. \qquad (17)$$

Neste caso, pode-se comprovar que:

$\Psi(G_{T_*}(\theta)) = \theta_0^1 = \mathbb{E}[G_{T_*}(\theta)\pi]$

Utilizando as relações (15) e (16) acima:

$$\begin{aligned}\Psi(G_{T_*}(\theta)) &= \mathbb{E}[G_{T_*} \frac{\xi}{\mathfrak{B}_{T_*}}] \\ &= \mathbb{E}[\frac{G_{T_*}(\theta)}{\mathfrak{B}_{T_*}} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]\end{aligned}$$

Logo , temos:

$$\Psi(G_{T_*}(\theta)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{G_{T_*}(\theta)}{\mathfrak{B}_{T_*}}] \qquad (18)$$

Vamos fixar $T < T_*$. Seja agora um tempo de parada $\tau \in [0, T_*]$ arbitrário.

Considere uma estratégia $\theta^{(\tau)}$ que investe apenas na obrigação sintética com vencimento em T conforme o seguinte procedimento:

(i) Comprar obrigação sintética Π_T na data $t = 0$.

(ii) Vender $t = \tau$.

(iii) Aplicar os recursos obtidos da venda no overnight até $t = T_*$.

Em outras palavras, se $t \leq \tau$, então:

$$\begin{gathered}\theta_t^T = 0,\ se\ T' \neq T\ e\ T' > 1 \\ e\ \theta_0^1 = V(0,T).\end{gathered}$$

Se $t = \tau$, vende-se a obrigação, isto é, $\theta_\tau^T = 1$, e reaplicando os proventos de venda de $\Pi_{\tau,t}$ até o fim, temos que para $s \geq \tau$:

$$\theta_s^1 = (1+O_{s-1})^{\frac{1}{252}}\theta_{s-1}^1$$

Da equação (18) acima, segue que:

$$\theta_0^1 = V(0,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V(\tau,T)\displaystyle\prod_{j=\tau}^{T_*-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}{\displaystyle\prod_{j=0}^{T_*-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}\right]$$

Logo,

$$V(0,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V(\tau,T)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{\tau-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}\right]$$

Definindo-se um processo estocástico $\{X_s^{(T)}\}_{s\leq T_*}$ em $L^2 \times \mathfrak{T}$ tal que:

$$X_s^{(T)} = \frac{V(s,T)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{s-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}, \qquad (19)$$

percebe-se que o mesmo satisfaz a relação $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_\tau^T] = X_0^{(T)}$, para qualquer $\tau \leq T_*$ sendo portanto um $\mathbb{Q}$-Martingal[16]. Como consequência, $X_t^{(\tau)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_\tau^{(T)}]$, o que significa que:

$$\frac{V(t,T)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{t-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V(T,T)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{T-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{j=0}^{T}\frac{1}{(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}\right]$$

Desta relação segue o resultado desejado e completando assim a prova do teorema principal.

4 Conclusões

Este trabalho considerou os problemas da formalização teórica dos modelos de apreçamento de derivativos em economias em desenvolvimento ou emergentes, onde os mercados para os ativos financeiros básicos encontram-se ainda em fase de gestação. Em

[16] Em virtude do Teorema de Amostragem, que pode ser visto em Billingsley [1995], Klebaner [1999], entre outros.

outras palavras, pretendeu-se construir um arcabouço teórico para o apreçamento de instrumentos financeiros de renda fixa em economias onde se verifica a inexistência original, ou de partida, de ativos básicos ou primitivos de renda fixa livre de risco.

Inicialmente foram formalizados os conceitos e definições que constituem uma economia amblíope. Esta por sua vez foi definida e suas limitações teórico-formais verificadas historicamente. Ao mesmo tempo mecanismos de completamento e apreçamento foram desenvolvidos a partir da conceituação e formalização de certos contratos financeiros ou produtos derivativos adicionais que ao mesmo tempo respeitam a evolução histórica das economias amblíopes.

Referências

1. Vasicek, O. [1977] An Equilibrium Characterization of the Term Structure. Journal of Financial Economics 5, 177-188.
2. Dothan, L.U. [1978] On the Term Structure of Interest Rates. Journal of Financial Economics 6, 59-69.
3. Cox, J.C., Ingersoll, J.E., and Ross, S.A. [1985] A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica 53, 385-407.
4. Ho, T.S.Y., Lee, S.-B [1986] Term Structure Movements and the Pricing of Interest Rate Contingent Claims. The Journal of Finance 41, 1011-1029.
5. Jamshidian, F. [1989] An Exact Bond Option Pricing Formula. The Journal of Finance 44, 205-209.
6. Black, F., Derman, E., Toy, W. [1990] A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options. Financial Analysts Journal 46, 33-39.
7. Black, F., Karasinski, P. [1991] Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. Financial Analysts Journal 47, 52-59.
8. Copeland T. E., Weston J. F. [1983]. Financial Theory and Corporate Policy (2nd ed). Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co.
9. Musiela, M., and Rutkowski, M. [2002]. Martingale methods in financial modelling. Springer.
10. Hirshleifer, J. [1966]. Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach. The Quarterly Journal of Economics, 80(2), 252.
11. Hull J [1993] Single-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivatives Securities. Journal of Financial and Qualitative Analysis, 28, 235-254
12. Hull, J., White, A. [1990] 'Pricing Interest Rate Derivative Securities.' The Review os Financial Studies 3, 573-592.
13. Hull, J., White, A. [1994a] Branching Out. Risk 7, 34-37.

14. Hull, J., White, A. [1994b] Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models. The
15. Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. [1992] Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology. Econometrica 60, 77-105.
16. Miltersen, K.R., Sandmann K., Sondermann D. [1997] Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates. The Journal of Finance 52, 409-430.
17. Jamshidian, F. [1997] LIBOR and Swap Market Models and Measures. Finance and Stochastics 1, 293-330.
18. Brace, A., Musiela, M. [1997] Swap Derivatives in a Gaussian HJM Framework. Mathematics of Derivative Securities, M.A.H. Dempster, S.R. Pliska, eds. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 336-368.
19. Hirshleifer, J., [1970] Investment, Interest and Capital, Prentice-Hall, International Series in Managment, London.
20. Harrison, J.M., Pliska, S.R. [1981] Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, Stochastic Processes and their Applications 11, 215-260.
21. Cochrane, J. [2001] Asset Pricing, Princeton University Press, Princeton
22. Harrison, J.M., Kreps, D.M. [1979] Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, Journal of Economic Theory 20, 381-408.
23. Dybvig, Philip H., and S. A. Ross [1987] 'Arbitrage'. Pp. 100-106 in New Palgrave: A Dictionary of Economics, volume 1, edited by J.Eatwell, M.Milgate, and P. Newman. London: Macmillan.
24. Duffie, D. [2001] Dynamic Asset Pricing Theory, 3rd. ed. Princeton: Princeton University Press.
25. Björk, T. [2004] Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press.
26. Debreu, G., [1959] 'The Theoty of Value'. Wiley, New York.
27. Arrow, K. J., [1964] 'The Role of Securities in the Optimal Allocation os Risk-Bearing' Review of Economic Studies 91-96
28. Ross, Stephen A. [1973]. 'Return, Risk and Arbitrage.' Wharton Discussion Paper published in Risk and Return in Finance, edited by I. Friend and J. Bicksler, pp. 189-217. Cambridge: Ballinger, 1976.
29. Ross, Stephen A. [1978]. 'A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams'. Journal os Buisness 51(3):453-75
30. Billingsey P. [1995] Probability and Measure, 3rd edition, Wiley Series in Probability and Mathematical
31. Klebaner, F. [1999] Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial College Press, London